

1. Introduction, but de la RdM

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux. (comportement sous l'effet d'une action mécanique)
- l'étude de la résistance des pièces mécaniques. (résistance ou rupture)
- l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

2. Hypothèse de la RdM, champ d'application

2-1) Le matériaux :

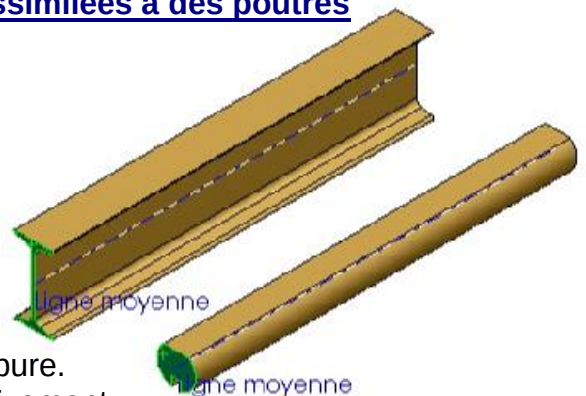
Il est **homogène** : Structure continue et identique dans toutes les directions; Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux (béton, pierre, bois, composites,...)

Il est **isotrope** : Même propriétés mécaniques dans toutes les directions. Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux.

2-2) Cas des pièces pouvant être assimilées à des poutres

Disposition de la matière, définition d'une poutre :

Poutre : on appelle *poutre* (voir fig.) un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*.



Les caractéristiques de la poutre sont :

- Ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- Section droite (S) constante ou variant progressivement.
- Grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- Existence d'un plan de symétrie.

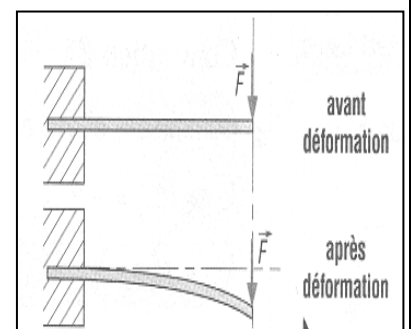
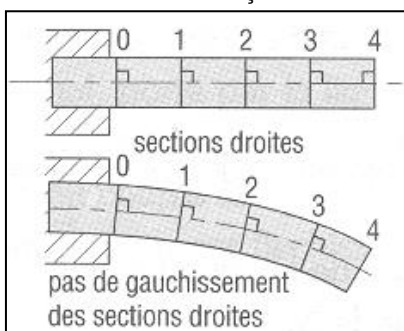
Les déformations :

Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du principe fondamental de la statique.

Les supports des forces seront eux considérés comme constants.

Navier & Bernoulli : Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

Barré de St Venant : Les résultats obtenus par la RDM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés.



2-2) Cas des pièces ayant une forme complexe

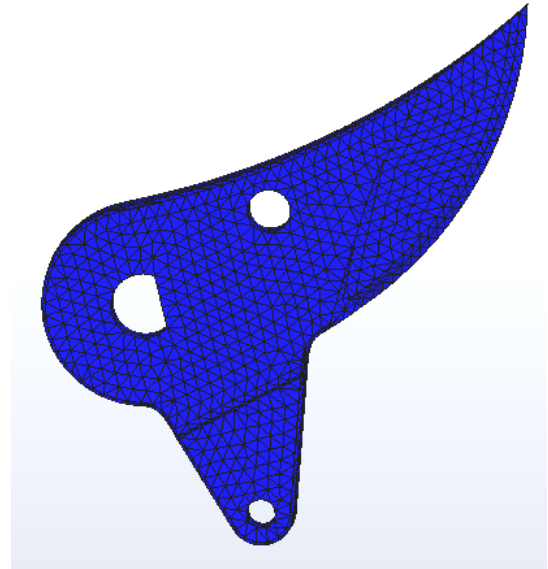
Si la pièce n'est pas une poutre, alors il faut utiliser un logiciel effectuant les calculs par éléments finis.

Le principe est le suivant :

Exemple : lame mobile du sécateur

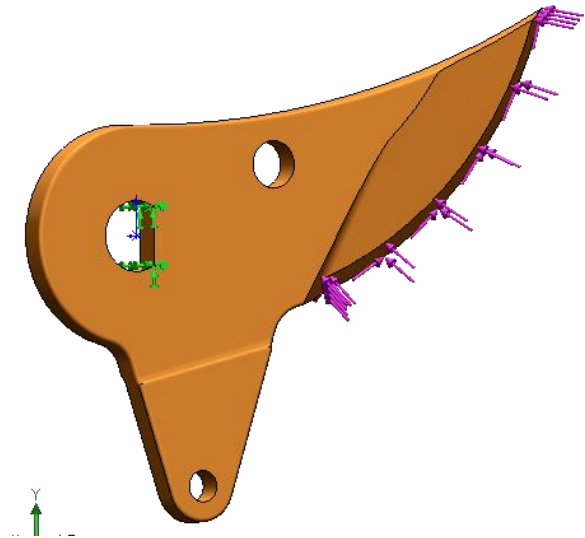
a) Maillage de la pièce.

La méthode des éléments finis repose sur un découpage de la pièce selon un maillage. D'habitude l'on choisit un maillage carré ou triangulaire mais rien n'interdit de choisir des maillages plus complexes. On peut resserrer le maillage près des endroits où l'on pense que la solution va beaucoup varier. Plus ce maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise.



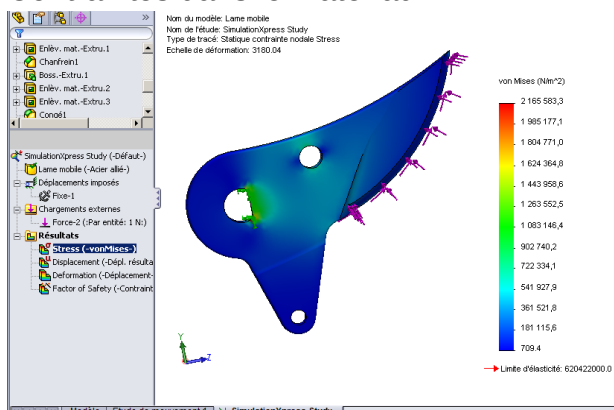
b) Définition des liaisons et du chargement

Il faut indiquer une surface considérée comme fixe et il faut modéliser les efforts s'appliquant sur la pièce

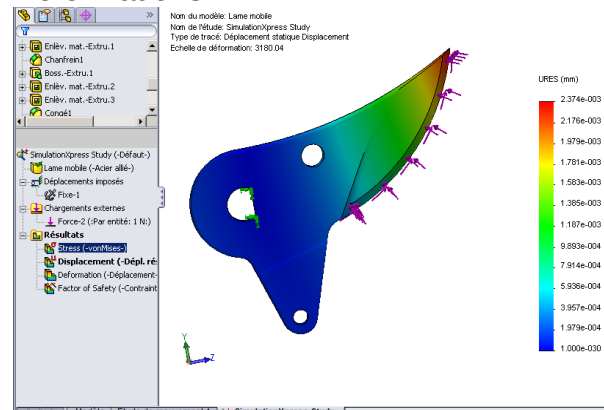


c) Interprétation des résultats.

Contraintes dans le matériau :



Déformations :



3. Efforts de cohésion

Pour étudier une poutre (E) en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures, il faut modéliser ce qui se passe dans la matière. Pour se faire, on réalise une **coupure fictive** de la poutre située à l'abscisse x qui la sépare en 2 tronçons E1 et E2.

Les efforts de cohésion traduisent les actions de contact de (E2) sur (E1). Ces efforts de cohésion permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.

On note les efforts de cohésion de la façon suivante :

Résultante :

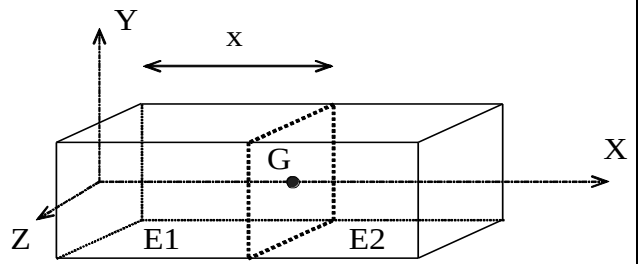
$$\vec{R} \begin{vmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{vmatrix}_R$$

- N :
- T_y et T_z :

Moment :

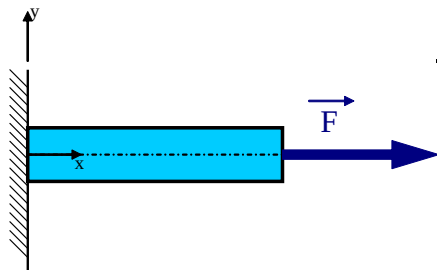
$$\vec{M}_G \begin{vmatrix} M_t \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{vmatrix}_R$$

- M_t :
- M_{fy} et M_{fz} :



4. Sollicitations simples

LA TRACTION – COMPRESSION :

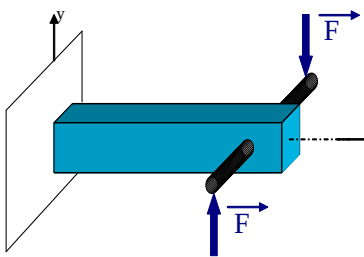


$$\begin{vmatrix} \vec{N} \neq \vec{0} \\ \vec{T} = \vec{0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{M}_t = \vec{0} \\ \vec{M}_f = \vec{0} \end{vmatrix}$$

Si $N > 0$: Traction
Si $N < 0$: Compression

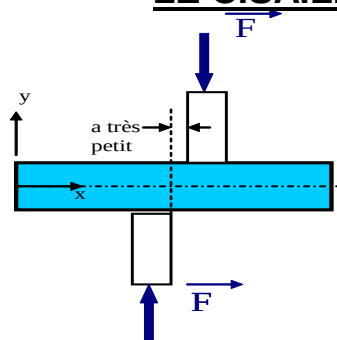
LA TORSION :



$$\begin{vmatrix} \vec{N} = \vec{0} \\ \vec{T} = \vec{0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{M}_t \neq \vec{0} \\ \vec{M}_f = \vec{0} \end{vmatrix}$$

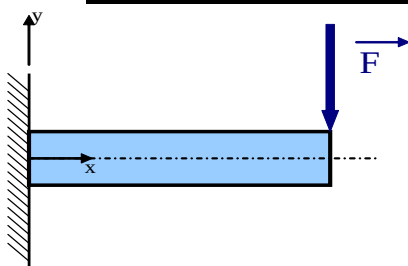
LE CISAILLEMENT :



$$\begin{vmatrix} \vec{N} = \vec{0} \\ \vec{T} \neq \vec{0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{M}_t = \vec{0} \\ \vec{M}_f = \vec{0} \end{vmatrix}$$

LA FLEXION SIMPLE :



$$\begin{vmatrix} \vec{N} = \vec{0} \\ \vec{T} = \vec{0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{M}_t = \vec{0} \\ \vec{M}_f \neq \vec{0} \end{vmatrix}$$

En résumé :

Composantes		Sollicitation
N	> 0	
	< 0	
Ty		
Tz		
Mt		
Mfy		
Mfz		

Remarque : Nous avons des sollicitations composées chaque fois qu'il y a, pour une même poutre, addition de sollicitations simples.

5. Notion de contraintes

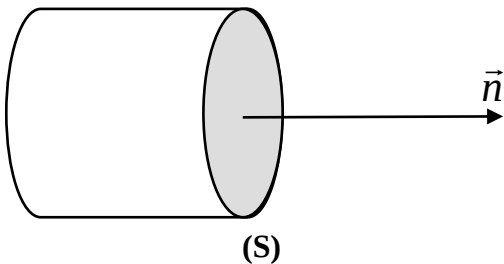
5-1) Définition :

Les efforts de cohésion induisent des contraintes à l'intérieur de la pièce qui caractérisent les actions mécaniques de cohésion interne au matériau qui existent entre les grains de matière.

Remarque : Une contrainte est assimilable à une pression. C'est un effort par unité de surface.

5-2) Contrainte NORMALE – Contrainte TANGENTIELLE :

Suivant l'orientation de la contrainte par rapport à la normale de la section, on définit 2 types de contraintes :



▪ **Contrainte normale σ :**

La contrainte normale σ est normale à la section droite (S)

$$\vec{\sigma} = \sigma \cdot \vec{n}$$

▪ **Contrainte tangentielle τ :**

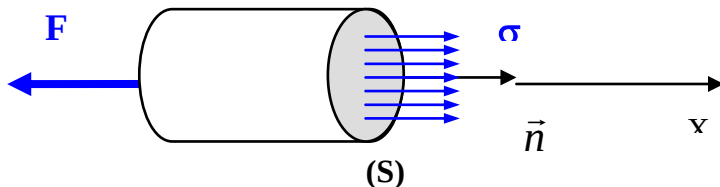
La contrainte tangentielle τ est située dans le plan tangent à la section droite (S)

$$\vec{\tau} = \tau \cdot \vec{t} = \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$$

6. Sollicitations de TRACTION - COMPRESSION

6-1) Détermination de la contrainte normale:

Quand une pièce est sollicitée à ses 2 extrémités par deux efforts F parallèles à l'axe longitudinal de la pièce, la répartition des contraintes dans la section (S) est uniforme et normale à la surface :



La contrainte normale de traction vaut :

$$\vec{\sigma} = \sigma \cdot \vec{n}$$

avec

$$\sigma =$$

$$\sigma > 0 :$$

Traction

Les efforts extérieurs tendent à allonger la pièce : Allongement

$$\sigma < 0 :$$

Compression

Les efforts extérieurs tendent à raccourcir la pièce : Raccourcissement

6-2) Loi de Hooke :

Lorsqu'une pièce se déforme dans son domaine élastique, son allongement est proportionnel à la contrainte appliquée. « E » appelé Module d'Young correspond à la raideur du matériau.

Loi de HOOKE :

$$\sigma =$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma : \text{contrainte normale de traction (Mpa)} \\ E : \text{Module d'élasticité longitudinal (Mpa)} \\ \varepsilon : \text{allongement unitaire (déformation. par unité de longueur)} \end{array} \right.$$

Carbures métalliques: $E = 550\,000$ Tungstène: $E = 420\,000\text{ N/mm}^2$ Aciers: $170\,000$ à $280\,000\text{ N/mm}^2$ Aciers de construction : $E = 200\,000$ à $220\,000\text{ N/mm}^2$ Cuivre : $E = 126\,000\text{ N/mm}^2$ Bronze : $E = 100\,000$ à $120\,000\text{ N/mm}^2$ Fonte : $E = 100\,000\text{ N/mm}^2$ Laiton : $E = 92\,000\text{ N/mm}^2$ Zinc : $E = 80\,000\text{ N/mm}^2$ Etain : $E = 40\,000\text{ N/mm}^2$ Bois : $E = 10\,000$ à $30\,000\text{ N/mm}^2$ Caoutchouc : $E = 7,5\text{ N/mm}^2$ Elastomère : $E = 3\text{ N/mm}^2$

6-3) Expression de la déformation élastique :

L'allongement élastique ΔL d'une pièce en traction dépend de la force de traction N , de la section S et de la longueur au repos de la pièce L .

$$\Delta L =$$

Avec :

F : norme de la force (N)

L : longueur au repos de la pièce (mm)

E : module de Young (Mpa)

S : aire de la section de la pièce (mm²)

6-4) Condition de résistance :

Pour qu'une pièce résiste aux efforts de traction sans subir de déformation permanente il faut que la contrainte interne ne dépasse pas la limite élastique R_e (en MPa) du matériau.

Pour des raisons de sécurité et compte tenu des hypothèses faites avec les modélisations, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension R_{pe} (aussi noté σ_{pe}). On considère que c'est la contrainte maximale admissible.

$$R_{pe} =$$

Avec

s: coefficient de sécurité >1

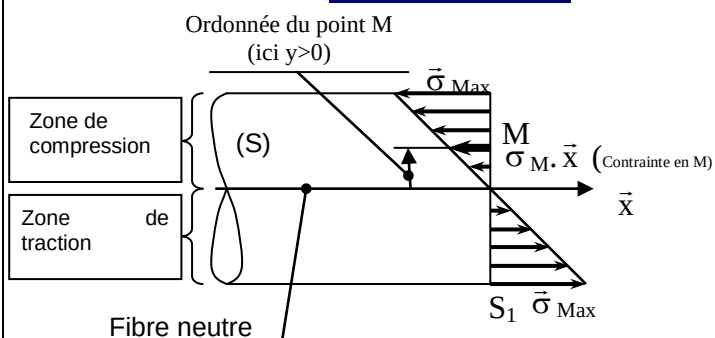
$s = 1,5$ à 3 pour des structures courantes.

$s = 8$ à 10 pour des structures présentant un danger pour l'homme et son environnement

□ **Condition de résistance :**

7. Sollicitation de FLEXION simple

7-1) Contraintes :



Dans le cas de la flexion plane simple, les contraintes se réduisent essentiellement à des contraintes normales.

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z} \cdot y$$

Avec :

- σ_M : contrainte normale au point M due à la flexion (en MPa)
- M_{fz} : moment de flexion selon (G, $\bar{z}$) dans (S) (en N.mm)
- I_{Gz} : moment quadratique de la section droite (S) / à son axe neutre (en mm⁴)
- y : ordonnée du point M dans (G, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) (en mm)

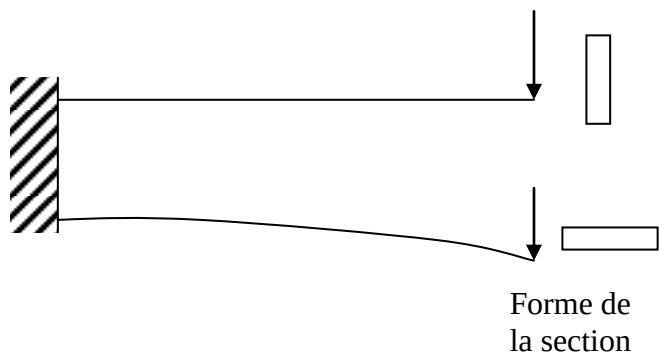
Remarque : - La contrainte normale maximale se trouve sur le point le plus éloigné de l'axe neutre (fibre moyenne).
 - La condition de résistance en flexion est la même que en traction en prenant la valeur maximale de la contrainte.

7-2) Moment quadratique :

Le moment quadratique caractérise la raideur de la poutre au fléchissement.

Exemple du réglet :

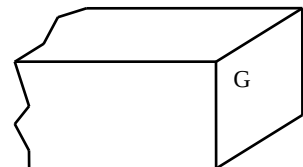
Un réglet fléchira facilement si il est à plat mais beaucoup moins si il est sur la tranche.



8. Sollicitation de CISAILEMENT

8-1) Contrainte dans la section droite :

Les contraintes tangentielles $\bar{\tau}$ sont sensiblement uniformément réparties dans une section droite.



$$\tau_{\text{moy}} = \frac{T}{S}$$

Avec :

- τ : contrainte tangentielle de cisaillement (Mpa)
- T : norme de l'effort tranchant (N)
- S : aire de la section droite (mm²)

8-2) Condition de résistance :

$$|\tau_{\text{moy}}| \leq R_{pg}$$

Avec :

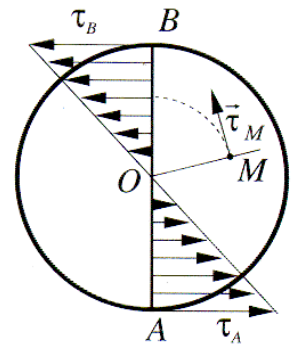
Reg : Résistance élastique au glissement (MPa)
 Rpg : Résistance pratique au glissement (MPa)
 s : coefficient de sécurité

$$R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

9. Sollicitation de TORSION

9-2) Contrainte dans la section droite :

La valeur de la contrainte tangentielle en un point M est proportionnelle à la distance de ce point au centre de la section. D'où la répartition des contraintes tangentielles dans la section droite :



Ce qui amène cette relation liant le rayon à la contrainte tangentielle :

$$\tau_M = \frac{M_t}{I_o} \rho_M$$

Avec :

- τ_M : Contrainte tangentielle dans le matériau. (Mpa)
- G : module d'élasticité transversale du matériau (ou module de Coulomb) (Mpa)
- ρ_M : rayon considéré pour l'analyse (mm)

Dans le domaine élastique, le moment de torsion M_t est proportionnel à l'angle unitaire de torsion θ .

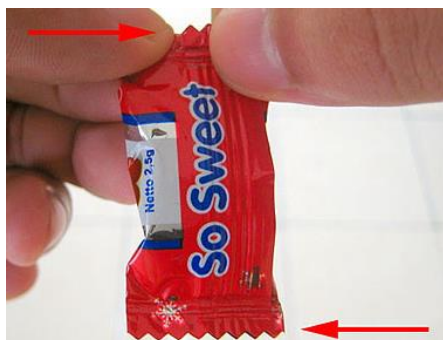
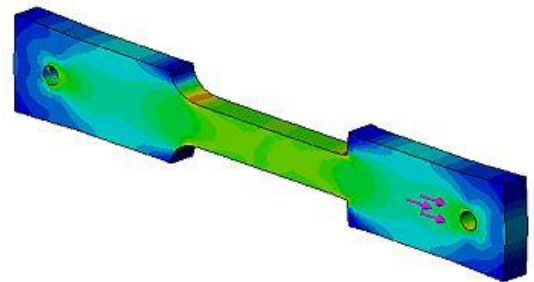
$$M_t = G \theta I_o$$

Avec :

- M_t : Moment de torsion (N.mm)
- G : Module d'élasticité transversale (MPa)
- θ : Angle unitaire de torsion (rad/mm)
- I_o : Moment quadratique de (S) par rapport à (O, $\bar{x}$) (mm⁴)

10. Concentration de contraintes

Les **concentrations de contraintes** surviennent lorsque la section d'une pièce varie de manière brutale : trou (perçage), rainure, épaulement, gorge, ...



Ce phénomène est parfois voulu par exemple dans le cas des emballages.

Pour limiter les concentrations de contraintes, il faut faire varier la géométrie des pièces progressivement.

